VI. Maxwell-Gleichungen:

Was kennen wir schon? [SI-Einheiten für heute]

- Elektrostatik: $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ $\mu_0 I$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$

  Coulomb Gesetz
- Ampersches Gesetz $\oint_{C} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} - \mu_0\vec{J} = 0}$

  für zeitl. konstante Ströme.
- Faraday-Gesetz $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} \cancel{+ \dot{\vec{B}}} = 0}$

- Nochmal Elektrostatik: $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi$
- Magnetostatik: $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$$\boxed{\begin{aligned} E_i &= -\partial_i\phi = -\partial_i A_0 \\ B_i &= \varepsilon_i{}^{jk}\,\partial_j A_k \end{aligned}}$$

$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$

- Uneindeutigkeit des Vektorpotentials:

$$\phi \mapsto \phi' = \phi + \mathrm{const} = A_0 + c_0 \quad : \quad \vec{E} \mapsto \vec{E}' = -\,\mathrm{grad}\,\phi' = \vec{E} \checkmark$$

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\lambda + \mathrm{const}$$

$$A_i \mapsto A_i' = A_i + \partial_i\lambda + c_i$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \longmapsto \vec{B}' = \mathrm{rot}\,\vec{A}' = \mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\lambda + 0 = \vec{B} + \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\lambda}_{=0} = \vec{B} \checkmark$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A_\mu = (A_0, \vec{A}) \\ &A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu\lambda + c_\mu \quad \text{ändert die Physik nicht} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Elektro- Magnetostatik:

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = -\,\mathrm{div}\,\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

$$\exists\vec{A} : \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \Leftarrow \mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$$

Erfahrung sagt: Es gibt keine magnet. Monopole

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0}$$
$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$$

von oben

Maxwell-Gl. der Elektromagnetostatik

Elektrodynamik:

$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0$ zeitl. veränderliches Magnetfeld führt zu Induktion (Ampere)

$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}_{/c^2} = \mu_0 \vec{J}$ zeitl. veränderliches Elektr. Feld führt zu Magnetfeldern (Maxwellscher Verschiebungsstrom)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 & \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}_{/c^2} = \mu_0 \vec{J}. \end{array}}$$

Gauss-scher Satz, triviale Teil der Maxwell-Gl.: Quellen + Senke der Felder.

Achtung: $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ denn: $E_i = -\partial_i A_0 - \partial_0 A_i$

Statik: $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 = -\mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,\phi$ ✓

Jetzt: $\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 = -\mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,\phi - \frac{1}{c}\mathrm{rot}\,\dot{\vec{A}} + \frac{1}{c}\mathrm{rot}\dot{\vec{A}}$ ✓

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ bleibt unverändert:

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mu_0\vec{J}$ mit $\dot{\vec{J}} = 0$

neu!

$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} = \underline{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\mathrm{grad}\,\dot{\phi}} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \underline{\mu_0\vec{J}_{\mathrm{const}}} + \mu_0 \vec{J}_{\mathrm{var}}$

Maxwellscher Verschiebungsstrom

$= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \partial_i\partial_0 A_0 + \partial_0\partial_0 A_i$

$= \varepsilon_i{}^{jk}\,\partial_j\,(\varepsilon_k{}^{lm}\,\partial_l A_m) + \partial_0(\partial_0 A_i + \partial_i A_0)$

~~$= (\delta_i{}^m \delta_j{}^l - \delta_j{}^m \delta_i{}^l)\partial_j\partial_l A_m + \partial_0(\partial_0 A_i + \partial_i A_0)$~~

$= (\delta_i{}^l \delta^{jm} - \delta_i{}^m \delta^{jl})\,\partial_j\partial_l A_m + \partial_0(\partial_0 A_i + \partial_i A_0)$

$\varepsilon_i{}^{jk}\varepsilon_k{}^{lm}$

$= \delta^{jl}\delta_i{}^m - \delta$

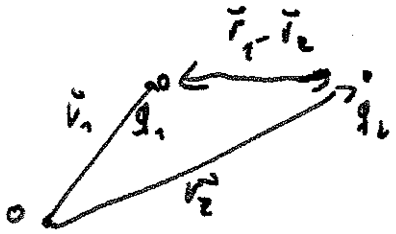
$$\boxed{\varepsilon_i{}^{jk}\,\varepsilon_k{}^{lm} = \delta_i{}^l\delta^{jm} - \delta_i{}^m\delta^{jl}}$$

$= \partial_i\,\delta^{jm}\partial_j A_m - \delta^{jl}\partial_j\partial_l A_i + \ldots$

$= \partial_i\partial_j A^j - \partial_j\partial^j A_i + \ldots$

$= \partial_i\,\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A_i$

VI.1. Feldbegriff



$$\vec F_{12} = k\, q_1 q_2 \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3} = -\vec F_{21}$$

Coulombgesetz

$$k = 10^{-7} c^2 \frac{N}{A^2} \text{ im SI-System} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

experimentelle Befund!

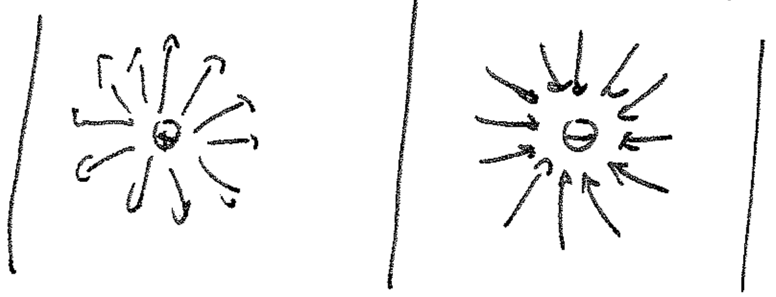
Theoretische Modellierung:

Die Ladungen erzeugen Felder (instantan, den ganzen Raum ausfüllend), die unabhängig von der Präsenz anderer Ladungen existieren.
Diese WW'en mit anderen Ladungen.

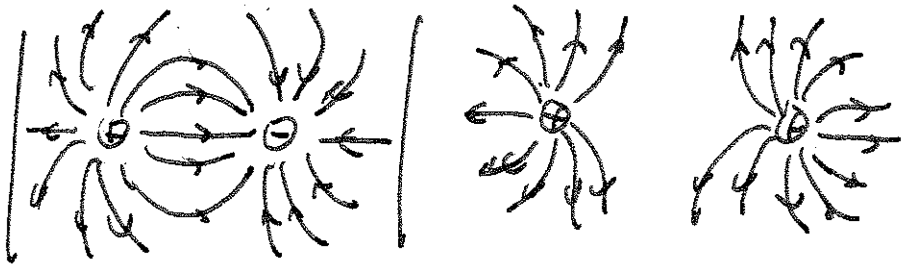
$$\vec F(\vec r) = q \vec E(\vec r)$$

also $\vec F_{12} = q_1 \cdot \underbrace{\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3}}_{\vec E_1} = q_1 \vec E_2$

Faraday: Bildsprache der Feldlinien (Bahnen von positiven Probeladungen im Feld)



Feldlinien schneiden sich nie!



Feldlinien $\perp$ Äquipotentialfläche

allgemein $\boxed{\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec r') \underbrace{\frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3}}}$ $F(\vec r) = q \vec E(\vec r)$

$$= -\text{grad} \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = -\vec\nabla_r \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$\boxed{\vec F = \int \rho(\vec r) \vec E(\vec r)\, d^3r}$$

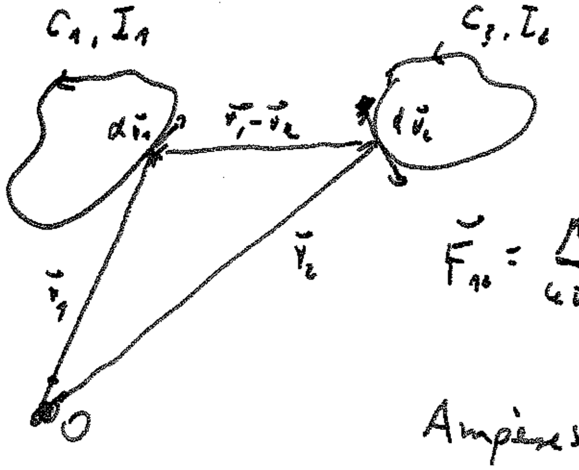
Gesamtkraft

$\vec E(\vec r) = -\vec\nabla \phi(\vec r)$ skalares elektr. Pot.

$\Rightarrow \vec F$ ist konservativ, $\phi(\vec r) - \phi(\vec r_0) = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} d\vec r' \cdot \vec E(\vec r')$ wegunabhängig

Nun Magnetfelder:

Statt Punktladungen werden Stromfäden als Grundelemente verwendet.



$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{r}_1 \times \left(d\vec{r}_2 \times \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right)$$

Ampèresches Gesetz, experimenteller Befund.

Vergleich mit Coulomb-Gesetz: $\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$

Mit $d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}) = d\vec{r}_2 (d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12}) - \vec{r}_{12} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)$

und $\oint_{C_1} d\vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\oint_{C_1} d\vec{r}_1 \nabla \frac{1}{r_{12}} = -\int_{S_1} d\vec{S} \cdot \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}}_{=0} \frac{1}{r_{12}} = 0$

$\partial S_1 = C_1$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\vec{F}_{21}$$ ✓ (actio = reactio)

Feld: $\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$ Biot-Savart Gesetz

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$\vec{j} \cap \vec{j}' = \emptyset$

allgemein:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) d^3r}$$

Vektorpotential: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow \vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A}$

$\Rightarrow \mathrm{div}\, \vec{B} = 0$

Lorentzkraft:

Sei eine Pkt-Ladung gegeben, Ladung q,
Position $\vec{r}_0(t)$, Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t)$, im externen $\vec{E}, \vec{B}$-Feld

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) & \text{genauer } \rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,v(\vec{r},t) & = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,v(\vec{r}_0(t)) \end{cases}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} = q\vec{E}(\vec{r}_0) + \int \vec{j}(\vec{r}) \times B(\vec{r})\, d^3r$$

$$= q\vec{E}(\vec{r}_0) + q\,v(\vec{r}_0) \times B(\vec{r}_0)$$

$$= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \checkmark$$

Eichinvarianz:

$$\left.\begin{cases} \vec{A} \mapsto \vec{A} + \operatorname{grad}\lambda \\ \phi \mapsto \phi - \dot{\lambda} \end{cases}\right\} A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$$

$$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \lambda$$

lässt $\vec{E}, \vec{B}$ unverändert

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \qquad \text{denn } \operatorname{rot}\operatorname{grad}\lambda = 0$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \dot{\vec{A}}$$

$$\mapsto -\operatorname{grad}\phi + \cancel{\operatorname{grad}\dot{\lambda}} - \dot{\vec{A}} - \cancel{\operatorname{grad}\dot{\lambda}} \quad \checkmark$$

Maxwellgl.: & Kontinuitätsgl.

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \operatorname{rot}\vec{B} - \frac{\dot{\vec{E}}}{c^2} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt} \qquad\qquad \Big\downarrow \operatorname{div}$$

$$\operatorname{div}\dot{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\dot{\rho} \qquad \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}}_{=0} - \operatorname{div}\frac{\dot{\vec{E}}}{c^2} = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0}\dot{\rho} + \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}\vec{j} = 0 \qquad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \;\hat{=}\; dF = 0 \;\hat{=}\; \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \end{cases}$$

$$d{*}F = j \;\hat{=}\; \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

$$j^\mu = (\rho, \vec{j})$$

Maxwell-Gl. & El-Mag Wellen:

Im Quellen freien Raum:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \dot{\vec{E}}/c^2 = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$$

$$\phi = -\operatorname{grad} \vec{E} - \dot{\vec{A}}$$

Wähle Lorentzeichung: $\operatorname{div} \vec{A} + \dot{\phi} = 0$

d.h. $\exists \lambda$: $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \lambda$ erfüllt Lorentz-Eichung;

$$\phi' = \phi - \dot{\lambda}$$

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \dot{\phi}' = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div}\operatorname{grad} \lambda + \dot{\phi} - \ddot{\lambda}$$

$$= \operatorname{div} \vec{A} + \dot{\phi} + \underbrace{(\Delta - \partial_t^2)}_{\text{Wellengl. für } \lambda}\lambda = 0$$

Es gelte nun $\operatorname{div} \vec{A} + \dot{\phi} = f \neq 0$

Wähle dann λ so, dass $(\Delta - \partial_t^2)\lambda = -f$ wird

(inhomogene Wellengl.) Eindeutigkeitssatz + geeignete Randbed ($f \to 0$ für $|\vec{r}|, |t| \to \infty$) $\Rightarrow$ so ein λ gibt es.

(da $\vec{A}, \phi$ und $\partial_\mu \vec{A}, \partial_\mu \phi \to 0$)

Nun:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \checkmark$$

$$= \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot}\operatorname{grad} \lambda) = 0 \checkmark$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} \phi - \operatorname{rot} \dot{\vec{A}} + \operatorname{rot} \dot{\vec{A}} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad} \phi = 0 \checkmark$$

$$= -\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \phi + \dot{\vec{A}} - \cancel{\operatorname{grad} \dot{\lambda}} + \cancel{\operatorname{grad} \dot{\lambda}}) + \operatorname{rot}(\dot{\vec{A}} + \operatorname{grad} \dot{\lambda}) = 0 \checkmark$$

Lorentz-Eichung erfüllt homog. Maxwell-Gln.

Weiter: $\operatorname{div}\vec{E} = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi + \dot{\vec{A}}) = -\Delta\phi - \operatorname{div}\dot{\vec{A}}$

Lorentz-Eichung $\operatorname{div}\vec{A} + \dot{\phi} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{div}\dot{\vec{A}} + \ddot{\phi} = 0$

$\operatorname{div}\vec{E} = -\Delta\phi + \ddot{\phi} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Delta\phi - \ddot{\phi} = 0}$ ϕ erfüllt Wellengl.!

Ebenso: $\operatorname{rot}\vec{B} - \dot{\vec{E}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}\dot{\phi} + \ddot{\vec{A}}$

Lorentz-Eichung $\operatorname{div}\vec{A} + \dot{\phi} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{grad}\dot{\phi} = 0$

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - \operatorname{grad}\operatorname{div})\vec{A} + \ddot{\vec{A}} = 0$$

Es gilt: $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$

denn $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ nach "bac-cab Regel"

$\Rightarrow \quad -\Delta\vec{A} + \ddot{\vec{A}} = 0$

$\boxed{\Delta\vec{A} - \ddot{\vec{A}} = 0}$ $\vec{A}$ erfüllt Wellengl.!

Direkter:

$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$

$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0$

gekoppeltes System lineare, homogene PDEs 1ter Ordnung für $\vec{E}, \vec{B}$.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \operatorname{rot}\dot{\vec{B}} = \operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E} + \underbrace{\operatorname{rot}\dot{\vec{B}}}_{\ddot{\vec{E}}/c^2} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} - \ddot{\vec{E}}/c^2 = 0}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{B} - \dot{\vec{E}}/c^2) = \operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div}\vec{B}}_{=0}) - \Delta\vec{B} - \underbrace{\operatorname{rot}\dot{\vec{E}}/c^2}_{-\ddot{\vec{B}}/c^4} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{B} - \ddot{\vec{B}}/c^2 = 0}$$

Maxwell-Gl. im quellenfreien Raum
entkoppeln zu Wellengl. für $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

Achtung: Wir haben daraus weiter abgeleitet.

Menge der Lösungen der Wellengl.n $\supset$ Lösungen der Maxwellgl.

Wir suchen solche Lsgn. für $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die auch die Maxwell-Gl. erfüllen!!

Mit Einleitung: $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi = 0$ $\quad \Psi = E_i, B_i$ (oder, in Coulomb-Eichung Φ, A_i)

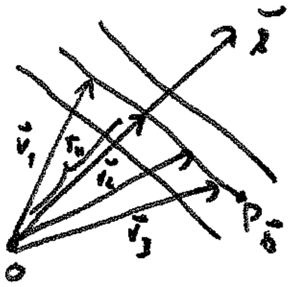
Jede Fkt: $\Psi(\vec{r},t) = f_-(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + f_+(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)$

erfüllt $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2}\ddot{\Psi} = 0$, falls f_-, f_+ hinreichend oft stetig diffbar sind, und

$$\boxed{\omega = c|\vec{k}|} \quad \text{gilt.}$$

O.B.d.A. sehen wir uns nur $f_-(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ an.

<u>Ebene Wellen:</u> Für einen festen Zeitpunkt t_0 ist das Argument $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t_0 = \text{const} \quad \forall\, \vec{r} \in P_{\vec{k}}$ $\qquad P_{\vec{k}} = \{\vec{r} : \vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const}\}$



$f_-(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t_0)$ hat dann $\forall\, \vec{r} \in P_{\vec{k}}$ für $t = t_0$ denselben Wert

$\rightsquigarrow$ Wellenfront = Ebene $\perp \vec{k} = P_{\vec{k}}$

$\rightsquigarrow$ Ebene Wellen.

Allgemein, für beliebige Zeiten gilt

$$\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{r}}_{k r \cos\sphericalangle(\vec{k},\vec{r})} - \omega t = k r_\parallel - \omega t \doteq \text{const}$$

$$k\underbrace{r\cos\sphericalangle(\vec{k},\vec{r})}_{r_\parallel} \quad \Big\} \Rightarrow r_\parallel = \frac{\vec{r}\cdot\vec{k}}{k} = \frac{\text{const}}{k} + \frac{\omega}{k} t$$

Diese Ebene konstanten Arguments ("Phase") für f_- hat Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dr_\parallel}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$$

in Richtung $\hat{k}$. $\vec{k}$ heißt Ausbreitungsvektor.

Spezielle Wahl für $f_\pm$:

$$f_\pm(\vec r,t) = A_\pm\, e^{i(\vec k\cdot\vec r \mp \omega t)}$$

Damit haben wir

$$\vec E = \vec E_0\, e^{i(\vec k\vec r-\omega t)}$$
$$\vec B = \vec B_0\, e^{i(\vec k'\vec r-\omega' t)}$$

(wieder schauen wir uns nur den f_--Anteil an)

Das muss aber auch die Maxwell-Gln. erfüllen:

- $\text{rot}\,\vec E + \dot{\vec B} = 0$

$$i(\vec k\times\vec E_0)\,e^{i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)} \overset{!}{=} i\omega'\vec B_0\, e^{i(\vec k'\cdot\vec r-\omega' t)} \qquad \forall \vec r, t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega' \\ \vec k = \vec k' \\ \vec k\times\vec E_0 = \omega\vec B_0 \end{cases}$$

- $\text{div}\,\vec E = 0$

$$\Rightarrow \vec k\cdot\vec E_0 = 0$$

- $\text{div}\,\vec B = 0$

$$\Rightarrow \vec k\cdot\vec B_0 = 0$$

- $\text{rot}\,\vec B - \dot{\vec E}/c^2 = 0$

$$\Rightarrow \vec k\times\vec B_0 = -\frac{\omega}{c^2}\vec E_0$$

$\Rightarrow$ $(\vec E_0, \vec B_0, \vec k)$ bilden Rechtssystem aus orthogonalen Vektoren

$\Rightarrow$ $\vec E, \vec B$ immer $\perp \vec k$ transversale Welle

$\vec E_0$ und $\vec B_0$ sind nicht unabhängig!

$$\vec k\times\vec E_0 = \omega\vec B_0 \quad \rightsquigarrow \quad k|\vec E_0| = ck|\vec B_0|$$
$$\vec k\times\vec B_0 = -\omega\vec E_0/c^2 \qquad k|\vec B_0| = +ck|\vec E_0|/c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec B_0| = \frac{1}{c}|\vec E_0|}$$

Bem: Die longitudinalen Wellen sind die Eichfreiheitsgrade !!!